Concursul Fractal

A treia Ediție, 19 ianuarie 2025

Problema 1. Calculați suma numerelor impare pozitive mai mici decât 90

Soluție: Vedem că putem împerechea numere cu aceeași sumă, adică $89 + 1 = 87 + 3 = 85 + 5 = \ldots 47 + 43 = 90$. Astfel vedem că avem $(45 - 1)/2$ perechi cu suma 90 și numărul 45 singur. Astfel suma este egală cu $22 \cdot 90 + 45$ care după simplificare devine 2025.

Problema 2. Mama l-a trimis pe Viorel la râu după apă și i-a dat două căldări, una cu volumul de 5 litri și alt de 7 litri. Mama l-a trimis pe Viorel să aducă exact 6 litri de apă, nu mai mult, nici mai puțin. Cum poate el face aceasta dacă căldările nu sunt gradate iar forma lor nu permite să afli exact câtă apă conțin ?

Soluție: Vom prezenta un algoritm prin care pot fi separați 6 litri de apă, acesta nu este unicul. Inițial, umplem căldarea de 5 litri, apoi turnăm toată apa în cea de 7. Din nou umplem căldarea de 5 litri și din nou vărsăm în cea de 7, dar deja până când aceasta devine plină. Rămânem cu $5+5-7=3$ litri în căldarea mică. Vărsăm căldarea plină de 7 litri, apoi mutăm cei 3 litri de apă în căldarea mare. Din nou umplem căldarea de 5 și vărsăm toată apa în căldarea mare ca să rămânem cu $5-7+3=1$ litru de apă în căldarea mică. Vărsăm căldarea mare și mutăm litru de apă din cea mică în cea mare .Făcând ultimul pas, luăm căldarea de 5 litri plină și o vărsăm în cea de 7, ca să ajungem cu $1+5=6$ litri în căldarea mare.

Problema 3. Suma a nouă cuburi perfecte distincte este 2025. Aflați nunerele ale căror cuburi au fost adunate.
În această problemă un număr se numește cub perfect dacă este puterea a treia a unui număr natural nenul.

Soluție: Aici, vom face simpla observație că $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 = 2025$, deci dacă nu am avea acest triplet, cum numerele sunt distincte, suma obținută ar fi mai mare de 2025, astfel unica sumă a nouă cuburi ce satisface condiția este cea a primelor 9 cuburi.

Problema 4. Un număr de trei cifre a fost ridicat la puterea a doua și s-a constatat că ultimele trei cifre ale rezultatului coincid în aceeași ordine cu numărul inițial. Găsiți toate numerele posibile de acest fel.

Soluție: Fie numărul din problemă x. Observăm că în numărul $x(x-1) = x^2 - x$, la scăderea celor 2 termeni se reduc ultimele 3 cifre, deci acesta e divizibil la 1000. Acum, $1000 = 125 \cdot 8 = 5^3 \cdot 2^3$, și e clar că nu putem avea un factor de 2 sau de 5 nu poate divide ambele paranteze, căci două numere consecutive nu au niciun divizor comun. Astfel, sau 125 divide x și 8 divide $x-1$ sau viceversa, adică 8 divide x și 125 divide $x-1$. Acum, cercetând multiplii de 125 mai mici decât 1000, obținem că unicele soluții sunt 376 și 625.